知识点 1 空间向量的有关概念

1. 空间向量及其长度的定义

在空间，我们把具有大小和方向的量叫做空间向量

向量的大小叫做向量的长度或模

2. 空间向量的表示方法

(1)几何表示:

(2)符号表示:

3. 几个特殊的空间向量

(1)零向量 (2)单位向量 (3)相反向量 (4)相等向量

知识点 2 空间向量的加减运算

1. 向量的加减运算法则 (1)三角形法则 (2)平行四边形法则

2. 空间向量的加法运算满足的运算律

(1)交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$; (2)结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

知识点 3　空间向量的数乘运算

1. 空间向量的数乘运算的定义

2. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向和长度

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $\lambda\neq0$ 时，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

3. 空间向量的数乘运算满足的运算律

(1)分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

(2)结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

知识点 4　共线向量与共面向量

1. 共线向量

(1)共线向量的定义

如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量(colliner vectors)或平行向量(parallel vectors).

(2)向量共线的充要条件(又称共线向量定理)

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

2. 共面向量

(1)共面向量的定义

平行于同一个平面的向量,叫做共面向量(coplanar vectors).

空间任意两个向量必共面,但空间任意三个向量不一定共面.

(2)三个向量共面的充要条件(又称共面向量定理)

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对(x,y),使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

知识点 5　共线向量定理、共面向量定理的推论

1. 共线向量定理的推论——三点共线问题

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$是 P,A,B 三点共线的充要条件

2. 共面向量定理的推论——四点共面问题

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$是 P,A,B,C 四点共面的充要条件.

1. 给出下列命题:

①若两个空间向量相等,则它们的起点相同,终点也相同;

②若空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$;

③若空间向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 满足 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$,则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{p}$.

其中正确的个数为 D

A. 0　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2. 化简:$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\boldsymbol{0}$.

3. 化简:$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$______.

$$=\frac{5}{6}\boldsymbol{a}+\frac{9}{2}\boldsymbol{b}-\frac{7}{6}\boldsymbol{c}$$

4. 下列说法正确的是　**答案**▶C

A. 平面内的任意两个向量都共线　C. 空间中的任意两个向量都共面

B. 空间中的任意三个向量都不共面　D. 空间中的任意三个向量都共面

5. 有下列命题：

①若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，则 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}(x,y\in\mathbf{R})$；

②若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面；

③若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线平行.

正确命题的个数为　**答案**▶B

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

6. 已知 O 是平面内任意一点，α 是任意角，下列等式一定可以判定 A,B,C 三点共线的是　**答案**▶B

A. $\overrightarrow{OC}=\sin\alpha\,\overrightarrow{OA}+\cos\alpha\,\overrightarrow{OB}$　C. $\overrightarrow{OC}=\sin\alpha\,\overrightarrow{OA}-\cos\alpha\,\overrightarrow{OB}$

B. $\overrightarrow{OC}=\sin^2\alpha\,\overrightarrow{OA}+\cos^2\alpha\,\overrightarrow{OB}$　D. $\overrightarrow{OC}=\sin^2\alpha\,\overrightarrow{OA}-\cos^2\alpha\,\overrightarrow{OB}$

7． 对空间任一点 O 和不共线的三点 A,B,C,若有关系式$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$,求证:点 P 与点 A,B,C 共面.

解析▶ 由已知得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$,

即$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

因为 A,B,C 三点不共线,所以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$不共线.

由向量共面的充要条件知点 P 与点 A,B,C 共面.

8． 对于空间任一点 O 和不共线的三点 A,B,C,若有$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,则“$x+y+z=1$”是“$P,A,B,C$ 四点共面”的

答案▶ C

A. 必要不充分条件 C. 充要条件

B. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$,判断 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线.

解析▶ 设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即 $3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2=\lambda(-3\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)$,

$\because \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\therefore \begin{cases}-3\lambda=3,\\8\lambda=4\end{cases}$ 无解.

$\therefore$ 不存在 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

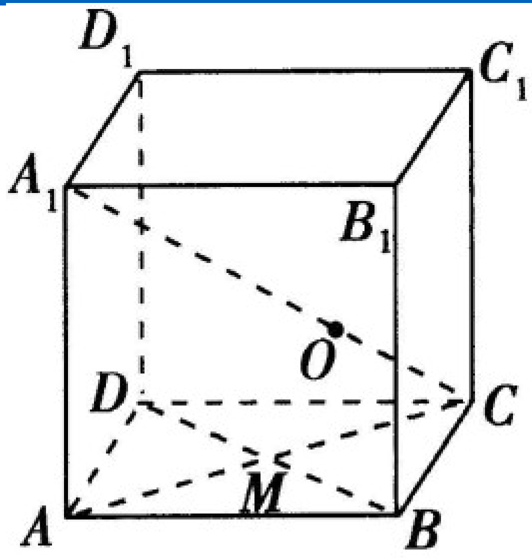
10. 已知空间三个不共面的向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$,若 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}-4\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}=(x+1)\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}$,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,求实数 x,y 的值.

解析▶ 因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$,

即 $(x+1)\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}=3\lambda\boldsymbol{m}-2\lambda\boldsymbol{n}-4\lambda\boldsymbol{p}$.

因为向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 不共面,所以 $\begin{cases}-4\lambda=2,\\-2\lambda=y,\\3\lambda=x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\y=1,\end{cases}$

11. 如图 3. 1. 1－18，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为 A_1C 上一点，且 $\overrightarrow{A_1O}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C}$，$BD$ 与 AC 交于点 M. 求证：C_1，O，M 三点共线.



解析▶ 连接 AO，AC_1，A_1C_1. ∵ $\overrightarrow{A_1O}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C}$，

∴ $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

∵ $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}-2\overrightarrow{AM}$，

∴ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC_1}-2\overrightarrow{AM})+\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. ∴ C_1，O，M 三点共线.

12. 已知 A,B,C 三点不共线，O 是平面 ABC 外任一点，若由 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$ 确定的一点 P 与 A,B,C 三点共面，则 $\lambda=$________.　$\lambda=\frac{2}{15}$

13. 已知 A,B,C 三点不共线，点 O 是平面 ABC 外的任意一点，若点 P 分别满足下列关系：

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=6\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OC}$;

(2) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

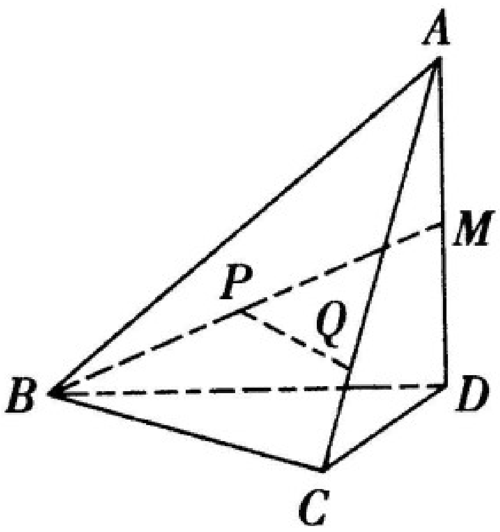
试判断点 P 是否与点 A,B,C 共面.

解析▶ (1) $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB}-3\overrightarrow{PC}$.　P 与点 A,B,C 共面.

(2) $\because \overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，而 $4-1-1=2\neq1$，

$\therefore$ 点 P 与点 A,B,C 不共面.

14. (2013·浙江节选)如图 3.1.1－24,在四面体$A-BCD$中,M是AD的中点,P是BM的中点,点Q在线段AC上,且$AQ=3QC$. 证明:PQ//平面BCD.



解析▶方法一 过P,Q分别作PS//AD交BD于S,QT//AD交CD于T,连接ST,则$\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}$,$\overrightarrow{QT}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

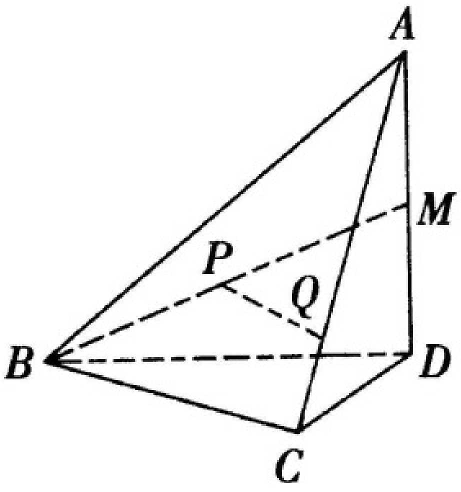
因为$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QT}$,所以四边形$PQTS$是平行四边形,则$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{ST}$.

又$PQ\not\subset$平面BCD,$ST\subset$平面BCD,所以PQ//平面BCD.

14. (2013 · 浙江节选)如图 3.1.1－24,在四面体A

M 是 AD 的中点,P 是 BM 的中点,点 Q 在线段 AC 上

$3QC$. 证明:PQ//平面 BCD.



方法二　由图形易得$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

由于 $PQ\not\subset$ 平面 BCD,所以 PQ//平面 BCD.

15. (2014 · 山东节选)如图 3. 1. 1 – 23,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是等腰梯形,$AB=2CD$,M 是线段 AB 的中点. 求证:C_1M // 平面 A_1ADD_1.

解析▶ 由题意得 $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AM}$,

又 $AB=2CD=2C_1D_1$,M 是线段 AB 的中点,

故 $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}$,

由于 $C_1M\not\subset$ 平面 A_1ADD_1,所以 C_1M // 平面 A_1ADD_1.

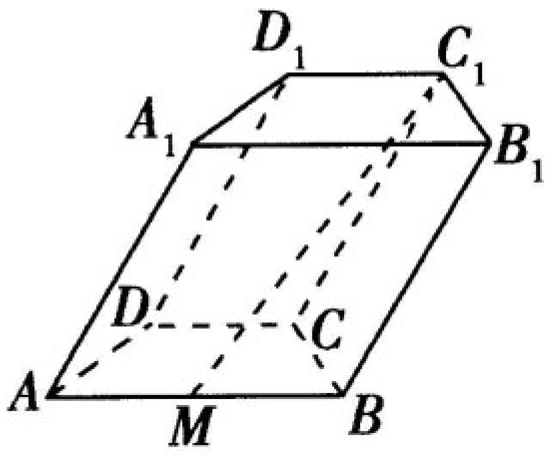


图 3. 1. 1 – 23